Janusz Wysoczański

AUTOREFERAT ROZPRAWY HABILITACYJNEJ:

"KONSTRUKCJE MODELI NIEPRZEMIENNEJ PROBABILISTYKI"

1 WPROWADZENIE.

Nieprzemienna probabilistyka jest dziedziną, która rozwija się bardzo intensywnie od początku lat 80-tych zeszłego wieku. Wtedy pojawiły się prace D. Avitzoura [Av] i D. Voiculescu [Voi1], w których sformułowano pojęcie wolnej niezależności.

Definicja 1.0.1 *Dla danej algebry $\mathcal{A}$ i funkcjonału liniowego φ mówimy, że podalgebry $A_1, \ldots, A_r \subset \mathcal{A}$ są niezależne w sposób wolny (ang. "freely independent"), w skrócie: "wolne", jeśli dla dowolnych elementów $a_1 \in A_{j_1}, \ldots, a_n \in A_{j_n}$, takich, że $j_1 \neq \ldots \neq j_n$, zachodzi warunek:*

$$\varphi(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0, \quad o\ ile \quad \varphi(a_1) = \ldots = \varphi(a_n) = 0 \tag{1.1}$$

Jeśli założymy, że $\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą z jedynką, a φ jest stanem (funkcjonalem dodatnim spełniającym $\varphi(1) = 1$), to dla dowolnego elementu hermitowskiego $a = a^* \in \mathcal{A}$ możemy określić jego *rozkład* (względem φ) jako miarę probabilistyczną μ, dla której

$$\varphi(a^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu(x). \tag{1.2}$$

Taka miara istnieje, jeśli $\mathcal{A}$ jest $\mathcal{C}^*$-algebrą. Wynika to z twierdzenia Gelfanda-Najmarka, gdyż domknięta podalgebra generowana przez element hermitowski a jest przemienną $\mathcal{C}^*$-algebrą, izomorficzną z algebrą funkcji ciągłych na spektrum a (zawartym w przedziale domkniętym na prostej rzeczywistej). Na podstawie twierdzenia Riesza o postaci funkcjonalu na takiej algebrze, istnieje miara probabilistczna μ na tym spektrum, spełniająca (1.2).

Rolę przestrzeni probabilistycznej odgrywa $(\mathcal{C}^*)$-algebra $\mathcal{A}$, a miary probabilistycznej – stan φ. W ten sposób wkraczamy do wolnej probabilistyki. Jeśli, na przykład, będziemy rozpatrywać ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów wolnych w $\mathcal{A}$, spełniających warunki: $\varphi(a_n) = 0$ oraz $\varphi((a_n)^2) = 1$, i utworzymy ich znormalizowane sumy częściowe

$$s_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} a_n, \tag{1.3}$$

to ciąg momentów $\varphi((s_N)^m)$ dąży do liczb Catalana

$$\lim_{N\to\infty} \varphi((s_N)^{2m}) = c_m := \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}, \qquad \lim_{N\to\infty} \varphi((s_N)^{2m+1}) = 0, \tag{1.4}$$

czyli momentów miary Wignera (ang. "semicircle law")

$$\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} = \frac{2}{\pi}\int_{-2}^{2} x^{2m}\sqrt{4-x^2}dx. \tag{1.5}$$

Jest to Centralne Twierdzenie Graniczne w wolnej probabilistyce. Rolę miary gaussowskiej pełni tutaj miara Wignera.

Tego typu twierdzenie graniczne było otrzymane przez E. Wignera dla gaussowskich macierzy losowych o wymiarach rosnących do nieskończoności. W 1975 roku M. Bożejko [?] pokazał, że dla nieskończonego ciągu wolnych generatorów grupy wolnej $\mathbb{F}_\infty$ granicą rozkładu unormowanych sum częściowych są liczby Catalana – momenty miary Wignera. Grupa wolna jest podstawowym modelem wolnej niezależności (stąd też nazwa): jako $\mathcal{A}$ rozpatrujemy $*$-algebrę funkcji o nośnikach skończonych na $\mathbb{F}_p$ - grupie wolnej o $p \in \{\infty, 2, 3, \ldots\}$ wolnych generatorach, a jako stan φ - wartość funkcji na elemencie neutralnym.

W ogólnej wersji to centralne twierdzenie graniczne jest twierdzeniem Voiculescu, twórcy wolnej probabilistyki.

Innymi naturalnymi modelami wolnej niezależności są grupy będące iloczynami wolnymi, które stanowiły przedmiot moich badań związanych z doktoratem.

R. Speicher [Sp1] zauważył związek wolnego twierdzenia granicznego z kombinatoryką zbiorów partycji. Mianowicie, w dowodzie tego twierdzenia, badając składniki sumy, która pojawia się po rozwinięciu wyrażenia po lewej stronie (1.4), wystarczy rozpatrywać tylko wyrażenia postaci $\varphi(a_{j_1} \ldots a_{j_{2m}})$ które są zwiazane z nieprzecinającymi się dwupartycjami. Ponadto, ilość takich dwupartycji jest liczbą Catalana. Dla porównania, w klasycznej probabilistyce, momenty miary gaussowskiej są także ilością wszystkich dwupartycji (z przecięciami).

Drugim rodzajem nieprzemiennej niezależności jest *niezależność boole'owska*. Jej definicja jest następująca.

Definicja 1.0.2 *Rodzina podalgebr A_j danej algebry $\mathcal{A}$, jest niezależna boole'owsko (względem danego na $\mathcal{A}$ funkcjonału φ), jeśli spełnia warunek: dla dowolnych $a_1 \in A_{j_1}, \ldots, a_n \in A_{j_n}$ jest*

$$\varphi(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \varphi(a_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(a_n), \tag{1.6}$$

o ile $j_1 \neq \ldots \neq j_n$.

Dla tego rodzaju niezależności, badanej m. in. przez Speichera i Woroudi [SpW], w analogicznym Centralnym Twierdzeniu Granicznym otrzymujemy miarę Bernoulli'ego: $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Niezależność ta jest związana z kombinatoryką partycji, które nie mają bloków wewnętrznych (są one zwane boole'owskimi). Takie partycje pojawiły się w pracach von Waldenfelsa.

Modelem dla tej niezależności jest *produkt markowski*, podany przez M. Bożejkę [Bo2]. Idea tego produktu jest następująca. Załóżmy, że mamy dane dwa zbiory (dyskretne) X_1 i X_2, które mają dokładnie jeden wspólny element $\{x_0\} = X_1 \cap X_2$. Rozpatrujemy przestrzenie Hilberta $H_i = l^2(X_i)$ (funkcji sumowalnych z kwadratem na X_i, $i = 1, 2$), traktowane jako podprzestrzenie w $H = l^2(X_1 \cup X_2)$, w których bazy ortonormalne są dane przez funkcje δ_x. Załóżmy ponadto, że mamy dane dwie algebry operatorów A_1 i A_2, ograniczonych na H, które spełniają warunki:

$$\forall a \in A_i \quad (\text{jeśli} \quad f \in H_{i'} \quad \text{oraz} \quad f \perp \delta_{x_0} \quad \text{to} \quad af = 0)\,, \tag{1.7}$$

przy czym $\{i, i'\} = \{1, 2\}$. Wówczas te algebry są niezależne boole'owsko względem funkcjonału $\varphi : H \ni f \mapsto f(x_0)$. Warunek nakładany na algebry A_i można rozumieć też tak, że A_i jest zadana na H_i, i rozszerzamy ją (każdy jej element) na H przez zero na dopełnieniu ortogonalnym H_i w H, $i = 1, 2$.

Trzecim rodzajem nieprzemiennej niezależności jest *niezależność monotoniczna* podana niezależnie przez N. Muraki [Mu1] i Y. G. Lu [Lu].

Definicja 1.0.3 *Mówimy, że rodzina podalgebr $\{\mathcal{A}_i : i \in \mathbb{N}\}$ danej algebry $\mathcal{A}$, indeksowana zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$, jest monotonicznie niezależna względem danego funkcjonału φ na $\mathcal{A}$, jeśli spełnione są następujące warunki:*

(M1) $a_i a_j a_k = \varphi(a_j) \cdot a_i a_k$,
o ile $a_i \in A_i,\ a_j \in A_j,\ a_k \in A_k$, *oraz* $i < j > k$.

(M2) $\varphi(a_{i_r} \dots a_{i_1} a_j a_{k_1} \dots a_{k_s}) = \prod_{p=1}^{r} \varphi(a_{i_p}) \cdot \varphi(a_j) \cdot \prod_{t=1}^{s} \varphi(a_{k_t})$,
o ile $i_r > \dots > i_1 > j < k_1 < \dots < k_s$ *oraz* $a_{i_p} \in A_{i_p}$, $1 \le p \le r$, $a_{k_t} \in A_{k_t}$, $1 \le t \le s$, $a_j \in A_j$.

Muraki i Lu podali też niezależnie konstrukcje ciągu operatorów monotonicznie niezależnych, które działają na skonstruowanej przez niego "dyskretnej" monotonicznej przestrzeni Focka. Operatory te są sumą monotonicznej kreacji i anihilacji. Drugi przykąld jest podobny, lecz operatory działają na "ciągłej" monotonicznej przestrzeni Focka. Przestrzeń ta jest rozpięta na wektorach indeksowanych ściśle malejącymi ciągami liczb naturalnych (w przypadku dyskretnym) lub rzeczywistych dodatnich (w przypadku ciągłym).

Łatwą konstrukcję operatorów monotonicznie niezależnych podał U. Franz [F2]. Jeśli mamy dane dwie przestrzenie Hilberta H_1 i H_2, i dwa operatory ograniczone $A_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, to na iloczynie tensorowym $H = H_1 \otimes H_2$ określamy operatory

$$a_1 = A_1 \otimes P_2, \quad a_2 = 1_{H_1} \otimes A_2.$$

Tutaj $P_2 : H_2 \mapsto \mathbb{C}\Omega$ jest projektorem ortogonalnym, natomiast Ω jest wyróżnionym wspólnym wektorem jednostkowym. Jeśli teraz rozpatrzymy stan φ na $\mathcal{B}(H)$ określony wzorem $\varphi(b) = \langle b\Omega|\Omega\rangle$, to operatory a_1 i a_2 są monotonicznie niezależne względem φ.

Moja konstrukcja "słabo monotonicznej przestrzeni Focka" była inspirowana pytaniem R. Lenczewskiego o przykład ciągu operatorów (czy algebr) monotonicznie niezależnych, działających na "dyskretnej" przestrzeni Focka (typu $\mathcal{F}(l^2)$) zamiast na "ciaglej" przestrzeni Focka (typu $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$).

Dla tych trzech rodzajów nieprzemiennej niezależności definiuje się także pojęcie splotu miar. Podobnie jak dla niezależności klasycznej, jeśli mamy dane dwa operatory a, b (elementy $*$-algebry z danym stanem φ), niezależne (w sposób wolny, booleowski czy monotoniczny), których rozkładami względem tego stanu są miary μ oraz ν, to rozkład ich sumy jest miarą ρ, którą nazywamy splotem (odpowiednio: wolnym, booleowskim czy monotonicznym) tych miar.

Mając określony taki splot bada się twierdzenia graniczne, tak jak w klasycznej probabilistyce. W rezultacie mamy następujące przypadki rozkładów granicznych w odpowiednich centralnych twierdzeniach granicznych (CLT):

(1) CLT w wolnej probabilistyce: **rozkład Wignera** $\quad d\mu(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}dx$

(2) booleowskie CLT: **rozkład Bernoulli'ego** $\quad \mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$

(3) monotoniczne CLT: **rozkład arcusa sinusa** $d\mu(x) := \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

t-deformacja została wymyślona jako ciągła transformacja łącząca splot wolny (przypadek $t = 1$) ze splotem boole'owskim (przypadek $t = 0$). Jednak jest ona na tyle ogólnym przekształceniem, że można ją zastosować do dowolnego splotu, otrzymując jego deformację. Dostaje się wówczas nowe miary "gaussowskie" w centralnych twierdzeniach granicznych. Z tymi deformacjami jest związana kombinatoryka, w której wnika

się głębiej w strukturę partycji (pojawiają się w naturalny sposób bloki lub składowe spójne: wewnętrzne i zewnętrzne). Naturalnym problemem jest także konstrukcja operatorów "t-gaussowskich" dla danego zdeformowanego CLT, czyli takich, które miałyby rozkłady dane przez miarę otrzymaną w danym zdeformowanym Centralnym Twierdzeniu Granicznym. Wówczas można badać własności algebr generowanych przez takie operatory. Dla t-deformacji splotu wolnego takie algebry von Neumanna były badane przeze mnie, a ich pełny opis został podany później przez E. Ricarda [Ric]. Dla t-deformacji splotu klasycznego znana jest konstrukcja takich operatorów t-gaussowskich, lecz ich własności pozostają jako otwarty problem. t-transformacja była dalej badana w doktoracie Ł. Wojakowskiego [Woj]. Uogólnienia t-transformacji rozpatrywali także A. Krystek i H. Yoshida [KrY].

Konstrukcje takich operatorów można otrzymać różnymi sposobami, deformując operatory kreacji i anihilacji na wolnej przestrzeni Focka, przez operator działający nietrywialnie tylko pomiędzy $\mathbb{C}\Omega \leftrightarrow H$ (t-deformacja) czy $\mathbb{C}\Omega \leftrightarrow H \otimes H$ (d-deformacja). Otwartym problemem pozostają zaburzenia "wyższych rzędów", typu $\mathbb{C}\Omega \leftrightarrow H \otimes \ldots \otimes H = H^{\otimes n}$, dla ustalonego $n \geq 3$, które mogą prowadzić do głębszego zrozumienia splotu wolnego. Badania w tym kierunku, chociaż innymi metodami, prowadzi od lat R. Lenczewski – między innymi wprowadzając w tym celu pojęcie "hierarchii wolnej" [Len1].

Niektóre modele nieprzemiennej probabilistyki okazują się być związane z grupami kwantowymi. Pojawiło się to między innymi w pracach M. Bożejki, B. Kummerera i R. Speichera [BKS] (klasyczne wersje nieprzemiennych procesów stochastycznych działających na grupie Worono-wicza $SU_q(2)$), a potem Ph. Biane [Bia]. Ponadto, konstrukcja słabo monotonicznej przestrzeni Focka oraz monotonicznej przestrzeni Focka, jest związana z modelami drugiej kwantyzacji, podanymi przez W. Pusza [Pu] oraz W. Pusza i S. L. Woronowicza [PuW], dla klasycznych relacji komutacji (CCR) i dla klasycznych relacji antykomutacji (CAR). Dlatego jednym z zagadnień, które pojawia się w moich badaniach, jest konstruowanie modeli związanych z grupami kwantowymi. Istotnym krokiem w tym kierunku było podanie nowej konstrukcji i opisu grupy kwantowej $U_q(2)$. Jednakże otwartym problemem pozostaje nadal zbadanie, jakiego typu nieprzemienne procesy stochastyczne są związane z tą grupą.

Opisy wielu przykładów modeli nieprzemiennej probabilistyki można także znaleźć w monografii G. Pisiera [P].

Powyższe konstrukcje doprowadziły też do pytania, zadanego przez V. P. Belavkina, o możliwość uogólnienia niezależności monotonicznej na przypadek, gdy zbiór indeksujący monotonicznie niezależne algebry nie jest liniowo uporządkowany (jak zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych), lecz jest jedynie częściowo uporządkowany. Jest to sytuacja, która pojawia się w klasycznej przestrzeni Minkowskiego, w której porządek jest dany przez stożek świetlny Lorentza. W tym przypadku elementy, które mają tą samą współrzędną czasową, są nieporównywalne.

Okazało się, że konstrukcja "słabo monotonicznej przestrzeni Focka" nadaje się do takich uogólnień. Geometrycznie jest ona związana z "produktem grzebieniowym grafów" (ang. "comb product"). Jednak zastosowanie jej w przypadku, gdy zbiór indeksów jest tylko częściowo uporządkowany, wymaga dodatkowo skorzystania z konstrukcji M. Bożejki, zwanej "produktem markowskim", który prowadzi do niezależności boole'owskiej. Połączenie tych dwóch konstrukcji prowadzi do "bm-produktu przestrzeni Hilberta", na którym określa się "bm-rozszerzenia operatorów". Te operatory spełniają warunki typu monotonicznej niezależności Muraki'ego, jednakże dodatkowo występują zależności pomiędzy operatorami indeksowanymi elementami nieporównywalnymi. Te warunki otrzymały nazwę "*bm - niezależności*", gdyż mogą być sformułowane dla dowolnej rodziny podalgebr danej algebry ze stanem.

Naturalne przykłady częściowych porządków pojawiają się w przestrzeniach euklidesowych V: zadane są przez stożki dodatnie $\Pi \subset V$. Spośród nich badałem następujace (dla $d \in \mathbb{N}$):

(1) $V = \mathbb{R}^d$, $\Pi = \mathbb{R}^d_+$;

(2) $V = \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}^d$ - przestrzeń Minkowskiego,
$\Pi = \{(x; y_1, \ldots, y_d) : x \geq \sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_d)^2}\}$ stożek Lorentza;

(3) $V = \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, rzeczywiste macierze d-wymiarowe,
$\Pi = \mathbb{H}erm_d(\mathbb{R})$ macierze rzeczywiste symetryczne dodatnio określone.

2 TREŚĆ ROZPRAWY.

2.1 t-deformacja.

Moja rozprawa habilitacyjna jest poświęcona konstrukcjom modeli nieprzemiennej probabilistyki. Konstrukcje te są różnymi deformacjami, głównie w przestrzeniach Focka, oraz deformacjami operatorów, które na nich działają. Początek tych badań bierze się z deformacji miar, która została nazwana "t-transformacją" i była zdefiniowana w pracy [BW0] w następujący sposób: dla miary probabilistycznej μ i liczby nieujemnej t na prostej rzeczywistej istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna μ_t dla której

$$\frac{1}{G_{\mu_t}(z)} = \frac{t}{G_\mu(z)} + (1-t)z,$$

gdzie

$$G_\mu(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-x} d\mu(x)$$

jest transformatą Cauchy'ego miary μ określoną dla $z \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu)$.

Zdefiniowanie takiej transformacji miar pozwala również określić transformację dowolnych splotów. Mianowicie, jeśli dany jest splot $\oplus$ miar probabilistycznych (na przykład splot klasyczny czy splot wolny), to określamy nowy splot $\oplus_t$ wzorem

$$\mu \oplus_t \nu := (\mu_t \oplus \nu_t)_{\frac{1}{t}}.$$

W pracy [BW1] badane były własności tej transformacji splotów. W szczególności pokazane zostało jak zmienia się miara graniczna w centralnym twierdzeniu granicznym i w twierdzeniu granicznym typu Poissona (dla splotu klasycznego i wolnego). W przypadku centralnego twierdzenia granicznego dla t-transformacji splotu wolnego otrzymuje się tak zwane miary Kestena: ich część absolutnie ciągła wyraża się wzorem

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{4t-x^2}}{1-(1-t)x^2}$$

i mają one atomy w punktach $\pm\frac{1}{\sqrt{1-t}}$, gdy $0 < t < \frac{1}{2}$. Momenty tych miar są związane z kombinatoryką na zbiorach nieprzecinających się dwupartycji i są dane wzorami:

$$m_{2n}(t) = \mathcal{C}_n(t) = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{NC}_2(2n)} t^{\sharp in(\mathcal{V})} = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} t^{k+1} \left\{ \binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k} \right\}$$

w którym współczynniki $D(n,k) := \binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k}$ są liczbami *Delaney'a*. W tym wzorze $\sharp in(\mathcal{V})$ oznacza ilość *bloków wewnętrznych* w dwupartycji $\mathcal{V}$. Podobna sytuacja pojawiła się też dla t-transformacji splotu klasycznego, jednakże tam w analogicznym wzorze trzeba rozpatrywać ilość *składowych spójnych zewnętrznych*.

W tej pracy pojawiły się też konstrukcje operatorów, działających na t-zdeformowanych przestrzeniach Focka (wolnej i symetrycznej), które względem stanu próżniowego mają momenty dane przez miary graniczne w centralnych twierdzeniach granicznych dla splotu wolnego i dla splotu klasycznego. Operatory te są postaci $G(f) := A(f) + B(f)$, czyli są sumami operatora anihilacji i operatora kreacji, dla ustalonego wektora jednostkowego f w danej przestrzeni Hilberta.

Konstrukcja jest następująca. W wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}^{\otimes n}$, zdefiniowanej na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, zaburzamy iloczyn skalarny kładąc:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m | y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)_t := \delta_{m,n} t^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (x_k|y_k)_{\mathcal{H}} \,.$$

Uzupełnienie $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ względem tego iloczynu skalarnego oznaczamy $\mathcal{F}_t(\mathcal{H})$ i jest to t-zdeformowana przestrzeń Focka. Na tej przestrzeni definiujemy operator kreacji $B(f)$ przez wektor $f \in \mathcal{H}$ jako wolną kreację:

$$B(f)\,(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

natomiast odpowiadający mu operator anihilacji $A(f)$ jest sprzężony względem t-zdeformowanego iloczynu skalarnego. Jego działanie można opisać wzorami:

$$A(f)\Omega = 0, \quad A(f)x_1 = (f, x_1)\Omega, \quad A(f)\,(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = t \cdot (f, x_1)_{\mathcal{H}} \cdot (x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

dla $n \geq 2$. Wówczas dla stanu $\varphi(X) := (X\Omega|\Omega)_t$ i dla wektora jednostkowego $f \in \mathcal{H}$ mamy wzór:

$$\varphi(G(f)^{2n}) = \mathcal{C}_n(t)$$

W przypadku t-wolnym badane były własności algebr von Neumanna

$$\Gamma_{t,n} = \left(\{G(e_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}\right)''$$

generowanych przez n–elementowe ciągi takich operatorów (zwanych *t-gaussowskimi*), gdzie $\{e_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ jest bazą ortonormalną, $n \in \{+\infty, 1, 2, \ldots\}$. W pracy [Wys4] udowodnione zostało, że w przypadku $n = +\infty$ nieskończonego ciągu takich operatorów generowana przez nie algebra von Neumanna jest faktorem złożonym ze wszystkich operatorów ograniczonych na t-zdeformowanej przestrzeni Focka. Dla ciągów skończonych ten problem został rozwiązany przez E. Ricarda [Ric].

Inną realizację wolnych operatorów t-gaussowskich otrzymałem w pracy [Wys2] poprzez deformację operatorów kreacji i anihilacji na wolnej przestrzeni Focka. W tym wypadku definiujemy operator $C(f)$:

$$C(f)x = (f|x)_{\mathcal{H}}\Omega; \quad C(f)y = 0, \quad \text{dla} \quad y \in \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad y \perp \mathcal{H},$$

oraz $C^*(f)$ jako sprzężony do $C(f)$ ($f \in \mathcal{H}$). Teraz, dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ definiujemy operatory

$$G_c(f) := \left(A(f) + A^{\dagger}(f)\right) + c \cdot (C(f) + C(f)^*)$$

które są samosprzężone. Następnie rozważamy momenty tych operatorów względem stanu wyznaczonego przez Ω:

$$M_c(n) := (G_c(f)^n \Omega|\Omega)\,.$$

Dowodzi się, że (dla wektora jednostkowego $f \in \mathcal{H}$) są to również momenty miary probabilistycznej μ_c na prostej (zwanej rozkładem operatora $G_c(f)$). Miary te są opisane w sposób następujący:
(1) Dla $c = -1$ jest $\mu_{-1} = \delta_0$.
(2) Dla $|c+1| < \sqrt{2}$ miara μ_c jest absolutnie ciągła i jej gęstość dana jest wzorem:

$$g_c(x) = \frac{1}{2\pi(1+c)^2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{1 - \frac{c(c+2)}{(1+c)^4}x^2}$$

dla $x \in [-2, 2]$.
(3) Dla $|c+1| > \sqrt{2}$ miara μ_c ma gęstość daną powyższym wzorem oraz atomy w punktach:

$$x_c^{\pm} := \pm\frac{(1+c)^4}{c(c+2)}.$$

(4) Dla $|c+1| = \sqrt{2}$ miara $\mu_{1\pm\sqrt{2}}$ jest absolutnie ciągła i jej gęstość ma wzór

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$

czyli arcus sinus na przedziale $[-2, 2]$.

W szczególnym przypadku, gdy $c_N = 1 - \sqrt{\frac{2N}{2N-1}} > \sqrt{2}$ otrzymujemy *miary Kestena*, związane ze spacerami losowymi na grupach wolnych.

W tej samej pracy otrzymałem również następujący wzór na momenty mieszane:

$$(G_c(f_1) \dots G_c(f_2 n)\Omega|\Omega) = \sum_{\mathcal{V} \in NC_2(2n)} \left((1+c)^2\right)^{n - \sharp in(\mathcal{V})} \prod_{\{j,k\} \in \mathcal{V}} (f_j|f_k)_{\mathcal{H}}$$

dla dowolnych wektorów jednostkowych $f_1, \dots, f_{2n} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Ta deformacja zaburzająca wolne operatory kreacji i anihilacji stała się podstawą do innych moich konstrukcji. W szczególności w tej samej pracy został skonstruowany ciąg operatorów monotonicznie niezależnych na tak zwanej słabo monotonicznej przestrzeni Focka.

2.2 Monotoniczna niezależność na słabo monotonicznej przestrzeni Focka.

Niezależność monotoniczna została wprowadzona przez N. Muraki i stanowi narzędzie do wyliczania momentów mieszanych.

Definicja 2.2.1 *Mówimy, że rodzina podalgebr $\{\mathcal{A}_i : i \in \mathbf{I}\}$ danej algebry $\mathcal{A}$, indeksowana zbiorem liniowo uporządkowanym $\mathbf{I}$, jest monotonicznie niezależna względem danego funkcjonału φ na $\mathcal{A}$, jeśli spełnione są następujące warunki:*
(M1) $b_i b_j b_k = \varphi(b_j) \cdot b_i b_k$ *jeśli* $i < j > k$,
(M2) $\varphi(b_{i_r} \dots b_{i_1} b_j b_{k_1} \dots b_{k_s}) = \prod_{a=1}^{r} \varphi(b_{i_a}) \cdot \varphi(b_j) \cdot \prod_{a=1}^{s} \varphi(b_{k_a})$
jeśli $i_r > \dots > i_1 > j < k_1 < \dots < k_s$.

Główną motywacją pracy [Wys2] dotyczącej słabo monotonicznej przestrzeni Focka była konstrukcja ciągu operatorów monotonicznie niezależnych. Słabo monotoniczna przestrzeń Focka jest konstrukcją, która wzięła się z ogólnej deformacji klasycznych relacji komutacji (μ-CCR), podanych przez W. Pusza i S. L. Woronowicza [PuW] (por. także [Pu]), dla $\mu = 0$. Jest to podprzestrzeń wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, rozpięta przez Ω oraz tensory postaci $e_{j_r} \otimes \dots \otimes e_{j_1}$, gdzie $\{e_j : j = 1, 2, \dots\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta

$\mathcal{H}$ oraz $j_1 \leq \cdots \leq j_r$. Na tej przestrzeni definiujemy ciąg operatorów A_i^M, $A_i^{\dagger M}$, będących obcięciami wolnej kreacji i wolnej anihilacji przez dany wektor bazowy $e_i \in \mathcal{H}$:

$$A_i^M(f)\Omega = 0;\ A_i^M(f)e_j = \delta_{ij}\langle f|e_j\rangle\Omega;\ A_i^M(f)e_{j_r}\otimes\cdots\otimes e_{j_1} = \delta_{ij_r}\langle f|e_{j_r}\rangle e_{j_{r-1}}\otimes\cdots\otimes e_{j_1}$$

natomiast $A_i^{\dagger M}$ określamy jako sprzężony do A_i^M. Biorąc sumę takiej kreacji i anihilacji $G_i^M := A_i^M + A_i^{\dagger M}$ otrzymujemy ciąg operatorów monotonicznie niezależnych, dla których pokazałem wprost następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2.2 *Jeśli* $S_N := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N G_i^M$, *to*

$$\lim_N \varphi\left((S_N)^{2k}\right) = \frac{1}{2^k}\binom{2k}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^{2k}}{\sqrt{2-x^2}}dx,$$

czyli w granicy uzyskuje się rozkład arcusa sinusa.

W dowodzie uzyskałem też następującą rekurencję dla współczynników dwumianowych:

$$\binom{2k}{k} = \sum_{m=1}^{k}\frac{2}{m}\binom{2m-2}{m-1}\binom{2k-2m}{k-m}$$

Nowa realizacja zmiennych t-gaussowskich ($t := (1+c)^{-2}$) na wolnej przestrzeni Focka została otrzymana przez wprowadzenie następującej deformacji $C(f)$ wolnej kreacji i anihilacji.

Definicja 2.2.3 *Dla* $x, f \in \mathcal{H}$ *operator* $C(f)$ *niech będzie określony następująco:*

$$C(f)x =< f \mid x > \Omega \quad oraz \quad C(f)y = 0 \quad dla \quad y \perp \mathcal{H}.$$

Operator sprzężony $C(f)^*$ *wyraża się wzorem* $C(f)^*\Omega = f$ *oraz* $C(f)^*v = 0$ *jeśli* $v \perp \Omega$.

Nowe operatory t-gaussowskie są określone wzorem (dla $c \in \mathbb{R}$ oraz $f \in \mathcal{H}$):

$$G_c(f) := (A(f) + c\cdot C(f)) + (A(f) + c\cdot C(f))^*.$$

Mają one momenty

$$M_c(n) = \psi(G_c(f)^n) = \langle G_c(f)^n\Omega|\Omega\rangle,$$

które są momentami miary μ_c opisanej w twierdzeniu 4.2 pracy [Wys2]. Dla $c = c_N = 1 - \sqrt{\frac{2N}{2N-1}}$ są to miary Kestena dla grupy wolnej o N wolnych generatorach.

Operatory te, obcięte do słabo monotonicznej podprzestrzeni Focka, nie są monotonicznie niezależne. Dopiero dodatkowa ich modyfikacja pozwala uzyskać także tą własność.

Definicja 2.2.4 *Niech* $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ *będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta* $\mathcal{H}$ *(*$e_0 := \Omega$*). Dla liczby naturalnej* n *określamy operator* D_n *na bazie* $\{e_{r_j}^{k_j}\otimes\cdots\otimes e_{r_1}^{k_1} : k_1,\ldots,k_j \geq 1; r_j > \cdots > r_1 \geq 0\}$ *słabo monotonicznej przestrzeni Focka* $\mathcal{F}_{wm}(\mathcal{H})$*:*

$$D_n(e_{r_j}^{k_j}\otimes e_{r_{j-1}}^{k_{j-1}}\otimes\cdots\otimes e_{r_1}^{k_1}) := \begin{cases} e_{r_{j-1}}^{k_{j-1}}\otimes\cdots\otimes e_{r_1}^{k_1} & jeśli \quad r_j = n, k_j = 1, \\ 0 & poza\ tym. \end{cases}$$

Wówczas

$$D_n^*(e_{r_j}^{k_j}\otimes e_{r_{j-1}}^{k_{j-1}}\otimes\cdots\otimes e_{r_1}^{k_1}) := \begin{cases} e_n\otimes e_{r_j}^{k_j}\otimes e_{r_{j-1}}^{k_{j-1}}\cdots\otimes e_{r_1}^{k_1} & jeśli \quad r_j < n, \\ 0 & poza\ tym. \end{cases}$$

Jeśli teraz A_n i A_n^* są operatorami anihilacji i kreacji (dla wektora bazowego e_n) na słabo monotonicznej przestrzeni Focka, to dla $c \in \mathbb{R}$ operatory

$$K_n^c := (A_n + cD_n) + (A_n^* + cD_n^*)$$

są monotonicznie niezależne i dla $c := \sqrt{2} - 1$ mają rozkłady arcusa sinusa (względem stanu danego przez Ω).

W końcowej części tej pracy rozpatrywane są operatory postaci $P := (A^* + \alpha I)(A + \alpha I)$, analogiczne do takich, które w innych przypadkach (np. klasycznym, wolnym, warunkowo wolnym) dają w rozkładzie miarę typu Poissona (z twierdzenia granicznego Poissona).

W naszym przypadku ich definicja jest następująca.

$$Q_\alpha := \left(\frac{A^* + c \cdot D^*}{\sqrt{2}} + \alpha I\right)\left(\frac{A + c \cdot D}{\sqrt{2}} + \alpha I\right)$$

dla $A := A(f)$ będącego anihilacją przez wektor jednostkowy $f \in \mathcal{H}$, $D := D(f)$ i $c := \sqrt{2} - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Rozkładem takiego operatora względem stanu próżniowego jest miara ν_α, nazwana *miarą typu Poissona o intensywności* α^2. Dla $\lambda := \alpha\sqrt{2}$ otrzymujemy miarę typu Poissona w postaci:

$$\nu_\lambda(dx) = \beta_+(\lambda) \cdot \delta_{\lambda(x_+ + 1 + \lambda^2)} + \beta_-(\lambda) \cdot \delta_{\lambda(x_- + 1 + \lambda^2)} + h_\lambda(x)dx,$$

gdzie $x_+ = \sqrt{4 + \frac{1}{\lambda^2}}$ daje atom dla każdego $\lambda > 0$, $x_- = -\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ daje atom (tylko) dla $0 < \lambda \leq 1$, natomiast część absolutnie ciągła ma gęstość h_λ daną wzorem

$$h_\lambda(x) = \frac{-\lambda}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{[(\lambda+1)^2 - x]\,[x - (\lambda-1)^2]}}{x\,(x^2 - 2(1+\lambda^2)x + \lambda^2(\lambda^2 - 2))}$$

i ma nośnik w przedziale $\left[(\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2\right]$.

2.3 Algebra von Neumanna generowana przez operatory t-gaussowskie.

W t-zdeformowanej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_t(\mathcal{H})$ rozpatrujemy nieskończony ciąg operatorów t-gaussowskich $G_i = G(e_i)$, gdzie $\{e_i \ : \ i \geq 1\}$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$, i badamy algebrę von Neumanna generowaną przez te operatory, czyli algebrę

$$\Gamma_{t,\infty} := \{G_i : i \geq 1\}'' \subset \mathbb{B}(\mathcal{F}_t(\mathcal{H})).$$

Głównym wynikiem pracy [Wys4] jest twierdzenie:

$$\Gamma_{t,\infty} = \mathbb{B}(\mathcal{F}_t(\mathcal{H})),$$

gdzie $\mathbb{B}(l_2)$ jest algebrą wszystkich operatorów ograniczonych na $\mathcal{F}_t(\mathcal{H})$, w szczególności jest faktorem typu I_∞.

Rezultat ten został wzmocniony poźniej przez E. Ricarda [Ric], który opisał wszystkie przypadki takich algebr von Neumanna $\Gamma_{t,n}$, generowanych przez n operatorów t-gaussowskich. Wówczas, w zależności od parametru $t > 0$, mamy dwie możliwości:

1. jeśli $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leq t \leq \dfrac{n}{n-\sqrt{n}}$, to $\Gamma_{t,n} = L(\mathbb{F}_n)$, gdzie $\mathbb{F}_n$ jest grupą wolną o n wolnych generatorach, a $L(\mathbb{F}_n)$ jest jej algebrą von Neumanna;

2. dla pozostałych $t > 0$ jest $\Gamma_{t,n} = L(\mathbb{F}_n) \oplus \mathbb{B}(l_2)$.

2.4 Grupa kwantowa $U_q(2)$.

Kolejny model, którego konstrukcja związana jest z badaniem różnych funkcji na partycjach, to grupa kwantowa $U_q(2)$. Konstrukcja podana przeze mnie w pracy [Wys7] jest oparta na twierdzeniu Woronowicza [SLW2], z którego wynika, że jeśli na zbiorze S_N permutacji zbioru N-elementowego mamy zadaną odpowiednią funkcję $E_{(i_1,\ldots,i_N)}$, to tworząc z niej "skręcony wyznacznik" możemy otrzymać (zwartą macierzową) grupę kwantową. Funkcja, którą badałem, jest związana z liczeniem ilości cykli w permutacjach. Mianowicie, w grupie permutacji S_N rozpatrujemy wszystkie transpozycje $t_{i,j} = (i,j)$ i dla $\sigma \in S_N$ określamy "długość permutacji" $|\sigma|$ jako minimalną ilość takich transpozycji, potrzebną do zapisania tej permutacji. Inaczej można powiedzieć, że $|\sigma| = N-$(ilość cykli w σ).

Dla $N = 3$ funkcja, którą rozpatrujemy dla parametru $q > 0$, jest dana wzorami:

$$E_{(1,2,3)} = 1,\ E_{(1,3,2)} = E_{(2,1,3)} = -q,\ E_{(2,3,1)} = E_{(3,1,2)} = q^2 \tag{2.8}$$

oraz

$$E_{(i,j,k)} = 0 \quad \text{jeśli} \quad \{i,j,k\} \neq \{1,2,3\}.$$

Zatem funkcja E zeruje się poza zbiorem permutacji, a na nim jest postaci $E_\sigma = (-q)^{|\sigma|}$. Ta funkcja, oraz dodatkowe założenia unitarności, pozwalają uzyskać następujące relacje dla generatorów a, c, v rozpatrywanęj ($*$-algebry) grupy kwantowej:

$$\begin{array}{ll} av = va & cv = vc \\ vv^* = v^*v = 1 & ac = qca \\ ac^* = qc^*a & cc^* = c^*c \\ aa^* + q^2cc^* = 1 & a^*a + c^*c = 1 \end{array} \tag{2.9}$$

W pracy [Wys7] w Twierdzeniu 3.1 opisane są nieprzywiedlne $*$-reprezentacje $\mathcal{C}^*$-algebry generowanej przez elementy a, c, v spełniające relacje (2.9). Są to, poza przypadkiem jednowymiarowym, operatory A, C, V na przestrzeni Hilberta l^2, dane na bazie ortonormalnej $\{\delta_n : n \geq 0\}$ wzorami:

$$A\delta_n = \sqrt{1-q^{2n}}\delta_{n-1},\ A\delta_0 = 0, \quad C\delta_n = \gamma q^n \delta_n, \quad V\delta_n = \lambda\delta_n, \tag{2.10}$$

gdzie $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ są ustalonymi parametrami, $|\lambda| = |\gamma| = 1$. Ponadto, $\mathcal{C}^*$-algebra generowana przez a, c, v, oznaczana jako $\mathcal{C}^*(U_q(2))$, jest izomorficzna z iloczynem tensorowym

$$\mathcal{C}^*(U_q(2)) = \mathcal{C}^*(SU_q(2)) \otimes \mathcal{C}(U(1)).$$

Z podanej konstrukcji otrzymujemy opis struktury grupy kwantowej $U_q(2)$. Okazuje się, że jest ona *iloczynem skręconym* swoich dwóch podgrup

$$U_q(2) = SU_q(2) \ltimes_\sigma U(1), \tag{2.11}$$

w którym operator "*skręcenia*" jest $*$-izomorfizmem $\mathcal{C}^*$-algebr

$$\sigma : \mathcal{C}^*(SU_q(2)) \otimes \mathcal{C}(U(1)) \mapsto \mathcal{C}(U(1)) \otimes \mathcal{C}^*(SU_q(2))$$

i ma postać (na generatorach):

$$\sigma(1 \otimes v) = v \otimes 1, \quad \sigma(a \otimes v^k) = v^k \otimes a, \quad \sigma(c \otimes v^k) = v^{k-1} \otimes c \tag{2.12}$$

Zastosowane w pracy podejście konstrukcyjne pozwoliło także (częściowo) opisać nieprzywiedlne reprezentacje ("grupowe") tej grupy kwantowej (Twierdzenie 5.1, [Wys7]) jako

iloczyny tensorowe ($\textcircled{\perp}$, w sensie Woronowicza), reprezentacji nieprzywiedlnych jej podgrup. Mianowicie, jeśli mamy reprezentację nieprzywiedlną d^s grupy kwantowej $SU_q(2)$, dla $s \in \{\frac{n}{2} \ : 0 \leq n \in \mathbb{N}\}$, to reprezentacja postaci

$$u_p^s = d^s \ \textcircled{\perp} \ b_p^s, \quad p \in \mathbb{Z} \tag{2.13}$$

jest nieprzywiedlną reprezentacją grupy kwantowej $U_q(2)$. Tutaj

$$b_p^s := diag\{v^p, v^{p+1}, \ldots, v^{p+2s}\}$$

jest $(2s+1$–wymiarową reprezentacją (macierzą diagonalną) grupy (kwantowej) okręgu jednowymiarowego $U(1)$, traktowanej jako $\mathcal{C}^*$-algebra generowana przez element unitarny v. W pracy pokazano, że jeśli b^s jest jakąś $(2s+1)$–wymiarową reprezentacją $U(1)$, która w iloczynie tensorowym $d^s \ \textcircled{\perp} \ b^s$ daje reprezentację nieprzywiedlną grupy $U_q(2)$, to musi ona być postaci b_p^s, dla pewnego całkowitego p.

Ostatnim istotnym wynikiem pracy jest opisanie jawnym wzorem operatora (pentagonalnego) *Kaca-Takesaki* dla grupy kwantowej $U_q(2)$, zwanego też *multiplikatywnym unitarnym* lub *fundamentalnym unitarnym*. Wzór jego działania uogólnia wynik Lance'a [Lan] dla $SU_q(2)$, jest dosyć skomplikowany i wygląda tak (por. Twierdzenie 6.2, [Wys7]):

$$\mathcal{W} = w_{124568}\Sigma_{(2356)(48)}w^*_{234568}\Sigma_{(48)}\mathcal{S}^*_{58}\mathcal{S}_{28}\mathcal{S}_{84}\mathcal{S}_{48}\Sigma_{(2635)}. \tag{2.14}$$

Ten operator działa na przestrzeni Hilberta

$$\mathcal{H} = \left(l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\otimes l^2(\mathbb{Z})\right)\otimes\left(l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\otimes l^2(\mathbb{Z})\right),$$

która ma 8 "współrzędnych". Jej bazę stanowią wektory postaci

$$\varepsilon_{a,b,c,d,e,f,g,h} := \varepsilon_a\otimes\varepsilon_b\otimes\varepsilon_c\otimes\varepsilon_d\otimes\varepsilon_e\otimes\varepsilon_f\otimes\varepsilon_g\otimes\varepsilon_h,$$

gdzie $a, e \in \mathbb{N}$, $b, c, d, f, g, h \in \mathbb{Z}$. Na pierwszej i czwartej współrzędnej (a i e) mamy elementy standardowej bazy $\{\varepsilon_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ w $l^2(\mathbb{N})$, natomiast na pozostałych "osiach" mamy elementy standardowej bazy $\{\varepsilon_j \ : \ j \in \mathbb{Z}\}$ w $l^2(\mathbb{Z})$.

Operator w_{124568} jest operatorem pentagonalnym Lance'a, działającym na wektorze bazowym tylko na współrzędnych $1=a, 2=b, 4=d, 5=e, 6=f, 8=h$, w^*_{234568} jest operatorem sprzężonym do operatora Lance'a, działającym na współrzędnych $2=b, 3=c, 4=d, 5=e, 6=f, 8=h$, $\mathcal{S}_{28}$ jest operatorem Stinespringa działającym tylko na współrzędnych b, h wzorem

$$\mathcal{S}_{28}(\varepsilon_{a,b,c,d,e,f,g,h}) = \varepsilon_a\otimes\varepsilon_{b+h}\otimes\varepsilon_c\otimes\varepsilon_d\otimes\varepsilon_e\otimes\varepsilon_f\otimes\varepsilon_g\otimes\varepsilon_h$$

i podobnie są zdefiniowane pozostałe operatory $\mathcal{S}_{ij}$. Operatory Σ_σ działają na $\mathcal{H}$ jako permutacje indeksów dla $\sigma \in S_8$ zbioru 8-elementowego $\{1, 2, \ldots, 8\}$ utożsamianego z $\{a, b, \ldots h\}$; na przykład $\Sigma_{(2635)}$ jest zadany przez cykl $\sigma := (2635) = (2 \mapsto 6 \mapsto 3 \mapsto 5) = (b \mapsto f \mapsto c \mapsto e \mapsto b)$, czyli

$$\Sigma_{(2635)}(\varepsilon_{a,b,c,d,e,f,g,h}) = \varepsilon_{a,f,e,d,b,c,g,h}.$$

Operator $\mathcal{W}$, działający na $\mathcal{H} = \mathbf{H}\otimes\mathbf{H}$, gdzie $\mathbf{H} = l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\otimes l^2(\mathbb{Z})$ spełnia równanie pentagonalne na $\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}$, czyli równanie:

$$\mathcal{W}_{23}\mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{12}\mathcal{W}_{13}\mathcal{W}_{23}, \tag{2.15}$$

w którym indeksy oznaczają na której "osi" działa operator $\mathcal{W}$. Na przykład, $\mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}\otimes 1$, $\mathcal{W}_{23} = 1\otimes\mathcal{W}$, natomiast $\mathcal{W}_{13}$ działa na osiach 1 i 3 w $\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}$.

2.5 d-deformacja.

Kolejna konstrukcja modelu nieprzemiennej probabilistyki, badana w pracy [Wys3] i nazwana tam *d-deformacją*, jest rozszerzeniem deformacji prowadzącej do operatorów t-gaussowskich na wolnej przestrzeni Focka. W tym wypadku deformujemy wolne operatory kreacji i anihilacji poprzez dodanie do nich wielokrotności operatora D zdefiniowanego w następujący sposób.

Definicja 2.5.1 *Dla $f, x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ niech $D(f)$ będzie określony wzorem:*

$$D(f)x_1 \otimes x_2 =< f|x_1 >< f|x_2 > \Omega, \quad D(f)y = 0 \quad dla \quad y \perp \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}.$$

Operator sprzężony $D(f)^*$ działa w sposób następujący:

$$D(f)^*\Omega = f \otimes f, \quad D(f)^*y = 0 \quad dla \quad y \perp \Omega.$$

Jak widać jest to zaburzenie działające nietrywialnie tylko między $\mathbb{C}\Omega$ i $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, podczas gdy zaburzenie w t-deformacji działało nietrywialnie pomiędzy $\mathbb{C}\Omega$ i $\mathcal{H}$. Teraz dla parametru rzeczywistego d i wektora $f \in \mathcal{H}$ definiujemy operator B i sprzężony B^*

$$B_d(f) := A(f) + d \cdot D(f), \quad B_d^*(f) := A^*(f) + d \cdot D^*(f).$$

Następnie rozpatrujemy operator samosprzężony $G_d(f) := B_d(f) + B_d^*(f)$, działający na wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Niech φ oznacza stan próżniowy na (operatorach ograni-czonych na) tej przestrzeni. W pracy [Wys3] badane są rozkłady operatorów $G_d(f)$ względem φ, dla $||f|| = 1$, czyli miary μ_d o momentach

$$M_d(n) := \varphi\left((G_d(f))^n\right) = \langle G_d(f)^n\Omega|\Omega\rangle.$$

Udowodnione jest, że miary te mają część absolutnie ciągłą postaci:

$$g_d(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(1+dx)^2x^2\sqrt{4-x^2}}{(1+dx)^4 - (x^2-1)(x^2-2)(1+dx)^2 + (x^2-1)^2},$$

o nośniku w przedziale $[-2, 2]$. Dla $d \neq 1$ atomy występują w zależności od wartości parametru d: dla $0 < d < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ nie ma atomów, dla $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq d < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ jest jeden atom w przedziale $[2, +\infty)$, a dla $d \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ miara ma dwa atomy: jeden ujemny $x_- \in (-\infty, -2]$ i drugi dodatni $x_+ \in [2, +\infty)$. Atomy te są określone jako (jednoznaczne) rozwiązania równań:

$$d = \frac{1}{x_+} \cdot \left(\sqrt{\frac{2(x_+^2-1)}{x_+^2 - 2 - x_+\sqrt{x_+^2-4}}} - 1 \right)$$

na przedziale $[2, +\infty)$ i

$$d = \frac{-1}{x_-} \cdot \left(\sqrt{\frac{2(x_-^2-1)}{x_-^2 - 2 + x_-\sqrt{x_-^2-4}}} + 1 \right)$$

na przedziale $(-\infty, -2]$. Dokładniej udało się zbadać przypadek $d = 1$. Wówczas miara μ_1 jest postaci:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\delta_{\sqrt{5}} + g_1(x)dx,$$

a jej częścią absolutnie ciągłą jest funkcją:

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{5-x^2}.$$

Momenty tej miary wyrażają się wzorami: $M_1(2n+1) = \frac{1}{2}(5^n - 1)$ oraz

$$M_1(2n) = \frac{1}{2}\left(1 + 5^{n-1}\sqrt{5}\right) + \frac{4^{n+1}}{10\sqrt{5}} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{2(n+k+2)} \cdot \frac{(2k+5)!!}{(2k)!!} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}\right].$$

W pracy tej opisano też wzór na momenty mieszane dla operatorów $G_d(f)$ w postaci:

$$\varepsilon(G_d(f_1) \dots G_d(f_n)) = \sum_{\mathcal{V} \in SWNC(n)} \prod_{B \in \mathcal{V}} d^{w(B)} \cdot < f_B >,$$

gdzie sumowanie wykonywane jest po nieprzecinających się partycjach zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, o blokach co najwyżej czteroelementowych, $w(B)$ jest wagą partycji B, a $f_1, \dots, f_n$ są wektorami jednostkowymi w $\mathcal{H}$. Funkcja $< f_B >$ jest zależna od wag i rodzaju bloków partycji B.

2.6 Monotoniczna niezależność związana ze zbiorami częściowo uporządkowanymi.

Warunki niezależności monotonicznej, sformułowane przez Muraki'ego dla liniowo uporządkowanego zbioru indeksów, można również zapisać w przypadku, gdy ten zbiór indeksów będzie jedynie częściowo uporządkowany. Mianowicie, jeśli zbiór indeksów $\mathbf{I}$ jest częściowo uporządkowany przez relację $\preceq$, to dla rodziny podalgebr $\{\mathcal{B}_\xi \ : \ \xi \in \mathbf{I}\}$ danej algebry $\mathcal{B}$, warunki monotonicznej niezależności względem danego funkcjonału liniowego φ na $\mathcal{B}$ zapisujemy w następujący sposób (tutaj: $\xi \prec \eta \Leftrightarrow (\xi \preceq \eta \wedge \xi \neq \eta)$):
M1. Jeśli $\xi \prec \rho \succ \eta$, to dla dowolnych $A_\xi \in \mathcal{B}_\xi$, $A_\rho \in \mathcal{B}_\rho$ oraz $A_\eta \in \mathcal{B}_\eta$ jest

$$A_\xi A_\rho A_\eta = \varphi(A_\rho) A_\xi A_\eta.$$

M2. Jeśli $\xi_k \succ \dots \succ \xi_1 \succ \rho \prec \eta_1 \prec \dots \prec \eta_m$, to dla dowolnych $A_{\xi_1}, \dots, A_{\xi_k} \in \mathcal{B}_\xi$, $A_\rho \in \mathcal{B}_\rho$ oraz $A_{\eta_1}, \dots, A_{\eta_m} \in \mathcal{B}_\eta$ jest

$$\varphi(A_{\xi_k} \dots A_{\xi_1} A_\rho A_{\eta_1} \dots A_{\eta_m}) = \varphi(A_{\xi_k}) \dots \varphi(A_{\xi_1}) \varphi(A_\rho) \varphi(A_{\eta_1}) \dots \varphi(A_{\eta_m}).$$

Jednakże w tej sytuacji oba warunki nie wystarczają do wyliczenia momentów mieszanych względem φ, czyli wyrażeń postaci $\varphi(A_{\xi_1} \dots A_{\xi_n})$, gdyż nie uwzględniają sytuacji kiedy niektóre spośród indeksów $\xi_1, \dots, \xi_n$ są nieporównywalne.

Konstrukcja słabo monotonicznej przestrzeni Focka okazała się dobra do uogólnienia na taką sytuację. W tym uogólnieniu, które wykorzystuje pewne geometryczne konstrukcje (produkt grzebieniowy i produkt markowski), mamy daną rodzinę przestrzeni Hilberta $\{\mathbf{H}_\xi \ : \ \xi \in \mathbf{I}\}$ tworzymy pewną podprzestrzeń $\mathcal{H}$ wolnej przestrzeni Focka, rozpiętą na tych przestrzeniach. Następnie, mając dany operator $\mathbf{A}_\xi$ ograniczony na $\mathbf{H}_\xi$, definiujemy jego rozszerzenie do operatora A_ξ ograniczonego na $\mathcal{H}$. Tak rozszerzone operatory z różnymi indeksami spełniają warunki **M1.** i **M2.**

Konstrukcja ta wygląda następująco. Załóżmy, że mamy daną rodzinę $\{\mathbf{H}_\xi \ : \ \xi \in \mathbf{I}\}$ przestrzeni Hilberta, indeksowaną zbiorem $\mathbf{I}$, częściowo uporządkowanym relacją $\prec$. Jeśli dwa elementy $\xi, \eta \in \mathbf{I}$ są nieporównywalne, to będziemy pisać $\xi \nsim \eta$. Załóżmy też, że

wektor Ω jest elementem wspólnym tych przestrzeni. Niech $\mathcal{F}_{\mathbf{I}} := \mathcal{F}_{\mathbf{I}}(\mathbf{H}_\xi : \xi \in \mathbf{I})$ będzie wolną przestrzenią Focka, czyli

$$\mathcal{F}_{\mathbf{I}} = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathbf{I}} \mathbf{H}_{\xi_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{H}_{\xi_n}$$

z naturalnym iloczynem skalarnym. Definiujemy $\mathcal{H}$ jako podprzestrzeń $\mathcal{F}_{\mathbf{I}}$, rozpiętą przez Ω oraz tensory postaci

$$h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1}, \qquad \xi_1 \prec \cdots \prec \xi_n, \quad h_{\xi_k} \in \mathbf{H}_{\xi_k}, \quad h_{\xi_k} \perp \Omega, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Wybieramy tutaj tylko te tensory, które mają monotoniczny (rosnący względem $\prec$) ciąg indeksów. Przestrzeń $\mathcal{H}$ nazywamy **bm-produktem** rodziny przestrzeni Hilberta $\{\mathbf{H}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$.

Definicja 2.6.1 *Dla danego operatora $\mathbf{A}_\xi$ ograniczonego na $\mathbf{H}_\xi$ niech $\mathbf{A}_\xi\Omega := \alpha\Omega + g_\xi$. Wówczas jego* **bm-rozszerzeniem** *nazywamy operator A_ξ na $\mathcal{H}$ określony wzorami:*

1. *dla $\xi \prec \xi_n$ oraz dla $\xi \nsim \xi_n$ jest $A_\xi(h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1}) = 0$,*
2. *dla $\xi = \xi_n$, jeśli $\mathbf{A}_\xi h_{\xi_n} = \beta\Omega + u_{\xi_n}$, gdzie $u_{\xi_n} \perp \Omega$, to*

$$A_\xi(h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1}) = \beta \cdot h_{\xi_{n-1}} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1} + u_{\xi_n} \otimes h_{\xi_{n-1}} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1},$$

3. *dla $\xi \succ \xi_n$ jest $A_\xi(h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1}) = \alpha \cdot h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1} + g_\xi \otimes h_{\xi_n} \otimes \cdots \otimes h_{\xi_1}$.*

Definicja ta jest tak sformułowana, aby warunek monotoniczności indeksów był zachowany przy działaniu rozszerzenia A_ξ. Nazwa bm-rozszerzenie wynika z jego własności: mianowicie, w pracy [Wys5] pokazałem następujące twierdzenie (Twierdzenie 2.6), dotyczące niezależności monotonicznej i niezależności boole'owskiej względem funkcjonału $\varphi(X) := \langle X\Omega|\Omega\rangle$.

Twierdzenie 2.6.2 *Jeśli dla $\xi \in \mathbf{I}$ algebra $\mathcal{B}_\xi$ składa się z bm-rozszerzeń operatorów z pewnej algebry $\mathbf{B}_\xi$ operatorów ograniczonych na $\mathbf{H}_\xi$, to*

(B). *Dla dowolnego całkowicie nieuporządkowanego podzbioru indeksów $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ (takiego że żadne dwa elementy w $\mathbf{J}$ nie są porównywalne) rodzina algebr $\{\mathcal{B}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ jest boole'owsko niezależna względem φ, czyli dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $A_{\xi_j} \in \mathcal{B}_{\xi_j}$ $(\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbf{J}, j = 1, \ldots, m)$ jest*

$$\varphi(A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_m}) = \prod_{j=1}^{m} \varphi(A_{\xi_j}).$$

(M). *Rodzina $\{\mathcal{B}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ spełnia warunki* **(M1.)** *i* **(M2.)** *monotonicznej niezależności.*

W dalszej części tej pracy pojawiają się warunki **BM1-BM3**, wystarczające do wyliczania momentów mieszanych. Warunki te, sformułowane w Twierdzeniu 2.8. mają nieco skomplikowaną formę, która została uproszczona w pracy [Wys6] do postaci zwanej **bm-niezależnością**. W tej postaci definicję można sformułować dla dowolnej rodziny $\{\mathcal{B}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ podalgebr pewnej algebry $\mathcal{B}$ i funkcjonału φ na $\mathcal{B}$).

Dalej badane są warunki bm-niezależności w przypadku dwóch przykładowych zbiorów częściowo uporządkowanych:

1. $\mathbf{I}_d := \mathbb{N}^d$ (krata punktów o współrzednych naturalnych) z porządkiem: dla $(a_1, \ldots, a_d) \neq (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbf{I}_d$ jest $(a_1, \ldots, a_d) \prec (b_1, \ldots, b_d) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \leq b_1, \ldots, a_d \leq b_d$.

2. $\mathbf{I}_d := \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ (krata całkowitoliczbowa w dodatnim stożku Lorentza) z porządkiem: dla $(k; a_1, \ldots, a_d) \neq (n; b_1, \ldots, b_d) \in \mathbf{I}_d$

$$(k; a_1, \ldots, a_d) \prec (n; b_1, \ldots, b_d) \quad \Leftrightarrow \quad n - k \geq \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_d - a_d)^2}.$$

Inne przykłady są związane z klasyfikacją stożków symetrycznych w przestrzeniach euklidesowych, podaną w monografii J. Faraut i A. Koranyi [FK], i stanowią przedmiot moich dalszych badań.

Własności bm-niezależności dotyczą tutaj operatorów będących bm-rozszerzeniami. Dla nieskończonej rodziny $\{A_\xi \ : \ \xi \in \mathbf{I}_d\}$ takich operatorów, bm-niezależnych w algebrze $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ względem funkcjonału φ, formułujemy analogię klasycznego centralnego twierdzenia granicznego. Wówczas przestrzeń probabilistyczną zastępujemy $*$-algebrą ze stanem φ, a niezależność klasyczną zastępujemy bm-niezależnością.

W klasycznym centralnym twierdzeniu granicznym, dla ciągu niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowych rozkładach, rozpatrujemy znormalizowane sumy częściowe postaci

$$S_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.16}$$

Tutaj sumowanie $X_1 + \cdots + X_N$ odbywa się po indeksach naturalnych z przedziału $[1, N]$; takie przedziały zastępujemy odpowiednimi podzbiorami skończonymi $\mathbf{J}_N \subset \mathbf{I}_d$. W pierwszym przypadku, dla $N = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d = \mathbf{I}_d$ bierzemy

$$\mathbf{J}_N := \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{I}_d \ : \ a_1 \leq N_1, \ldots, a_d \leq N_d\}$$

W drugim przypadku ($\mathbf{I}_d = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$), dla $N \in \mathbb{N}$ określamy

$$\mathbf{J}_N := \{(k; a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{I}_d \ : \ 0 \leq k \leq N\}$$

Znormalizowane klasyczne sumy częściowe S_N zastępujemy sumami

$$R_N := \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{J}_N|}} \sum_{\xi \in \mathbf{J}_N} A_\xi, \tag{2.17}$$

a o operatorach A_ξ zakładamy, że są samosprzężonymi bm-rozszerzeniami i spełniają warunki:

$$\varphi(A_\xi) = 0, \qquad \varphi(A_\xi^2) = 1, \qquad \sup_{\xi \in \mathbf{J}_N} \|A_\xi\| < +\infty.$$

Trzecie założenie można osłabić, ale nie jest to istotne dla wyznaczenia granicy w poniższym twierdzeniu. W rezultacie otrzymujemy następujące twierdzenia graniczne:

Twierdzenie 2.6.3 (bm-CLT). *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją granice*

1. $\lim_{N \to +\infty} \varphi\left((R_N)^{2n+1}\right) = 0$, *oraz*

2. $\lim_{N \to +\infty} \varphi\left((R_N)^{2n}\right) = g_n$,

przy czym ciąg $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem (parzystych) momentów symetrycznej miary probabilistycznej o nośniku zwartym, spełniającym rekurencję:

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_d(k) \cdot g_{k-1} \cdot g_{n-k}. \tag{2.18}$$

Współczynniki $\gamma_d(k)$ są postaci:

1. $\gamma_d(k) := k^{-d}$ *w przypadku* $\mathbf{I}_d = \mathbb{N}^d$,

2. $\gamma_d(k) := \binom{k(d+1)}{d+1}^{-1}$ *w przypadku* $\mathbf{I}_d = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$.

Dowody tych twierdzeń są podobne technicznie, a ich główne elementy są następujące. Fakt, że ciąg graniczny (g_n) jest ciągiem momentów pewnej miary probabilistycznej, wynika z tego, że φ jest stanem (funkcjonalem dodatnim unormowanym $\varphi(1) = 1$), a operatory R_N są samosprzężone, więc ciąg $\varphi(R_N^{2n})$ jest dodatnio określony. Zatem w granicy otrzymujemy także ciąg dodatnio określony, który jest ciągiem momentów miary probabilistycznej. Nieparzyste momenty są zero, więc jest to miara symetryczna. Ponadto rekurencja pozwala łatwo (indukcyjnie) ograniczyć z góry ciąg (g_n) przez ciąg geometryczny; np. w przypadku 1. mamy

$$g_n \leq c_1^n, \qquad c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-d},$$

a w przypadku 2. mamy

$$g_n \leq c_2^n, \qquad c_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k(d+1)}{d+1}^{-1},$$

więc miara ta ma nośnik zwarty.

W uzasadnieniu istnienia ciągu granicznego korzystamy z pewnych własności kombinatorycznych i geometrycznych, które pozwalają dokonać redukcji obliczeń.

Po pierwsze, przy przejściu granicznym $N \to +\infty$ wyrażenie

$$\varphi\left((R_N)^{2n}\right) = \frac{1}{|\mathbf{J}_N^n|} \sum_{\xi_1,\ldots,\xi_{2n} \in \mathbf{J}_N} \varphi\left(A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_{2n}}\right) \tag{2.19}$$

daje to samo, co wyrażenie

$$\frac{1}{|\mathbf{J}_N^n|} \sum_{(\xi_1,\ldots,\xi_{2n}) \in bmNC_2^n(\mathbf{J}_N)} \varphi\left(A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_{2n}}\right). \tag{2.20}$$

W ostatnim wzorze sumowanie jest wykonywane tylko po pewnych specjalnych ciągach $2n$-elementwych o wyrazach z $\mathbf{J}_N$, oznaczanych $bmNC_2^n(\mathbf{J}_N)$. Są to ciągi, dla których stowarzyszona z nimi "naturalna" partycja jest dwupartycją bez przecięć, spełniającą dodatkowo warunek monotonicznego uporządkowania bloków. "Naturalna" partycja to taka, która ma bloki utworzone przez połączenie takich samych elementów: dwa elementy $\xi_i, \xi_j \in \mathbf{J}_N$ ciągu $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ są w tym samym bloku (czyli są połączone ze sobą) wtedy i tylko wtedy gdy są równe ($\xi_i = \xi_j$). Dwupartycja ma wszystkie bloki dwuelementowe. Połączenia nie mogą się przecinać, czyli nie dopuszczamy sytuacji takiej, że $\xi_i = \xi_k$, $\xi_j = \xi_l$ i jednocześnie $i < j < k < l$. Monotoniczne uporządkowanie bloków jest dane przez

warunek: jeśli $i < j < k < l$ oraz $\xi_i = \xi_l$, $\xi_j = \xi_k$, to $\xi_i \prec \xi_j$. Inaczej mówiąc, blok, który jest wewnątrz innego, jest utworzony przez "większy" element. Jest to warunek związany z niezależnością monotoniczną. Drugim warunkiem, który z tego wynika, jest taki, że jeśli dwa elementy nieporównywalne ($\xi_i \nsim \xi_k$) tworzą dwa bloki $\xi_i = \xi_j, i < j$, $\xi_k = \xi_l, k < l$, to musi być albo $j < k$ albo $l < i$. Innymi słowy, albo jest $\max\{i,j\} < \min\{k,l\}$, albo $\max\{k,l\} < \min\{i,j\}$. Jest to warunek, który pojawia się w związku z niezależnością boole'owską.

Po drugie, dla takich specjalnych ciągów prawdziwa jest własność zwana *niezmienniczością na podstawienia zachowujące porządek* (*"order preserving substitution"*) z Lematu 4.6 [Wys5].

Lemat 2.6.4 *Jeśli $\sigma : \mathbf{I} \mapsto \mathbf{I}$ jest odwzorowaniem zachowującym częściowy porządek $\prec$, i dla danych dwóch ciągów $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}), (\eta_1, \ldots, \eta_{2n}) \in bmNC_2^n(\mathbf{I})$ jest $\sigma(\xi_j) = \eta_j$ $(j = 1, \ldots, 2n)$, to przy założeniu $\varphi(A_{\xi_j}^2) = \varphi(A_{\eta_j}^2)$ dla $j = 1, \ldots, 2n$ zachodzi równość*

$$\varphi\left(A_{\xi_1} \ldots A_{\xi_{2n}}\right) = \varphi\left(A_{\eta_1} \ldots A_{\eta_{2n}}\right). \tag{2.21}$$

Tą własność wykorzystujemy w następujący sposób. W sumowaniu (2.20) patrzymy na którym miejscu występuje ξ_1. Ponieważ występuje on dokładnie dwa razy, więc drugi raz (poza miejscem 1) pojawia się na miejscu o numerze $2k$, dla pewnego $1 \leq k \leq n$. Ten numer musi być parzysty, bo rozpatrujemy dwupartycję bez przecięć. Elementy $\xi_2, \ldots, \xi_{2k-1}$ muszą być większe od ξ_1, ze względu na monotoniczność dwupartycji. Wybrane zbiory $\mathbf{J}_N$ mają taką własność, że

$$\{\xi \in \mathbf{J}_N \ : \ \xi_1 \prec \xi\} = \xi_1 + \mathbf{J}_{N-K} \tag{2.22}$$

dla pewnego K. Dokładniej, $K = \xi_1 = (k_1, \ldots, k_d)$ w przypadku 1, oraz $\xi_1 = (K; a_1, \ldots, a_d)$ w przypadku 2.

Ta własność pozwala zastosować Lemat o niezmienniczości na podstawienia i sprowadzić badaną sumę do postaci, z której, po przejściu granicznym, otrzymujemy rekurencję na momenty miary granicznej.

Tą samą rekurencję można też otrzymać w sposób czysto kombinatoryczny. Mianowicie, dla skończonego podzbioru $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ rozpatrujemy zbiór $\mathcal{BM}NC^n(\mathbf{J})$ złożony z ciągów $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ o własnościach takich jak $bmNC_2^n(\mathbf{J})$, z tą różnicą, że naturalna partycja nie jest dwupartycją, tylko żądamy, aby każdy element ξ występował w ciągu parzystą ilość razy. Wówczas, dla ciągu liczb $S_n^N := |\mathcal{BM}NC^n(\mathbf{J}_N)|$, oznaczających moc zbioru, mamy (Twierdzenie 5.4, [Wys5]):

$$S_n^N = \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{I}(k)| S_{n-k}^N S_{k-1}^{N-k}. \tag{2.23}$$

W powyższej rekurencji $\mathbf{I}(k)$ jest podzbiorem w $\mathbf{J}_N$ zdefiniowanym, w przypadku 2, następująco:

$$\mathbf{I}(k) := \{(k; a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{J}_N \ : \ a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}^d\} \tag{2.24}$$

(jest to podzbiór kuli d-wymiarowej o promieniu k).

Po podzieleniu obu stron równości (2.23) przez $|\mathbf{J}_N^n|$ i przejściu granicznym $N \to +\infty$ dostajemy rekurencję dla ciągu momentów $(g_n)_{n \geq 0}$.

W kombinatoryce związanej z niezależnością monotoniczną czy bm-niezależnością pojawiają się różne zbiory partycji, definiowane przy pomocy pewnych specjalnych funkcji. Na

przykład, dla $c > -1$ oraz $\xi \in \mathbf{I}$ rozpatrujemy bm-rozszerzenie K_ξ^c operatora $\mathbf{K}_\xi^c$, ograniczonego na $\mathbf{H}_\xi$ i zdefiniowanego (na bazie $\{e_\xi^n := e_\xi \otimes \cdots \otimes e_\xi$ (tensor rzędu n)$: n \geq 0\}$, przy czym $e_\xi^0 := \Omega$ dla każdego $\xi \in \mathbf{I}$) wzorem:

$$\mathbf{K}_\xi^c \Omega := c \cdot e_\xi^1, \quad \mathbf{K}_\xi^c e_\xi^1 := c\Omega + e_\xi^2, \quad \mathbf{K}_\xi^c e_\xi^m := e_\xi^{m-1} + e_\xi^{m+1}$$

dla $m \geq 2$. Względem stanu φ, wyznaczonego przez wektor Ω, taki operator $\mathbf{K}_\xi^c$ ma rozkład dany przez miarę t-gaussowską, dla $t := (1 + c^2)^{-1}$. Na bm-produkcie $\mathcal{H}$, dla dowolnych $\xi_1, \ldots, \xi_{2m}$, mamy wzór na momenty mieszane:

$$\varphi\left(K_{\xi_1}^c \ldots K_{\xi_{2m}}^c\right) = \sum_{\mathcal{V} \in BMNC_2(\xi_1, \ldots, \xi_{2m})} t^{|mo(\mathcal{V})|}. \tag{2.25}$$

Dla zbioru liniowo uporządkowanego $\mathbf{I}$ dostajemy stąd wzór, który pozwala liczyć momenty mieszane na słabo monotonicznej przestrzeni Focka.

Tutaj pojawia się sumowanie po zbiorze $BMNC_2(\xi_1, \ldots, \xi_{2m})$ składającym się z dwupartycji bez przecięć, na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 2m\}$, których bloki są wyznaczone przez jednakowe elementy ciągu $\xi_1, \ldots, \xi_{2m}$ i numerowane tymi elementami w sposób (słabo) monotoniczny. Na przykład, jeśli $\xi_1 = \cdots = \xi_{2m}$ to $BMNC_2(\xi_1, \ldots, \xi_{2m})$ jest zbiorem wszystkich nieprzecinających dwupartycji na zbiorze $\{1, \ldots, 2m\}$.

Ponadto, we wzorze (2.25) występuje funkcja $\mathcal{V} \mapsto |mo(\mathcal{V})|$ licząca ilość monotonicznych bloków zewnętrznych w partycji $\mathcal{V} \in BMNC_2(\xi_1, \ldots, \xi_{2m})$. Pojęcie "monotonicznego bloku zewnętrznego" jest zdefiniowane w następujący sposób. Załóżmy, że partycja $\mathcal{V}$ ma bloki numerowane p różnymi elementami: $\{\eta_1, \ldots, \eta_p\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{2m}\}$, oraz $|\{\eta_1, \ldots, \eta_p\}| = p$. Dla każdego $1 \leq s \leq p$ rozpatrujemy podpartycję $\mathcal{V}_s$ złożoną ze wszystkich bloków o numerze η_s (traktując chwilowo pozostałe bloki jako nieistniejące). Niektóre bloki partycji $\mathcal{V}_s$ są wówczas zewnętrzne, a inne wewnętrzne (tylko względem bloków tej partycji, a nie całej $\mathcal{V}$!). Ilość takich bloków zewnętrznych oznaczamy $|o(\mathcal{V}_s)|$ i wówczas

$$|mo(\mathcal{V})| := \sum_{s=1}^{p} |o(\mathcal{V}_s)|. \tag{2.26}$$

2.7 Symetryczne, dodatnio określone macierze rzeczywiste.

W pracy [Wys6] pojawiają się warunki **BM1**-**BM2** sformułowane dla operatorów będących bm-rozszerzeniami. Jest to uproszczona wersja warunków **BM1**-**BM3** z pracy [Wys5]. Ta uproszczona wersja nadaje się do uogólnienia na dowolną rodzinę podalgebr danej algebry z wyróżnionym funkcjonałem i wówczas nosi nazwę bm-niezależności:

Definicja 2.7.1 *Niech $\{B_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ będzie rodziną podalgebr danej algebry $\mathcal{B}$, na której mamy zadany funkcjonał φ. Mówimy, że rodzina ta jest* **bm-niezależna** *(względem φ) jeżeli spełnia poniższe dwa warunki:*

BM1. *Jeśli dla $\xi, \eta, \rho \in \mathbf{I}$ zachodzi: $\xi \prec \rho \succ \eta$ lub $\xi \nsim \rho \succ \eta$ lub $\xi \prec \rho \nsim \eta$, to wówczas dla dowolnych $b_\eta \in \mathcal{B}_\eta$, $b_\xi \in \mathcal{B}_\xi$, $b_\rho \in \mathcal{B}_\rho$ jest*

$$b_\xi b_\rho b_\eta = \varphi(b_\rho) \cdot b_\xi b_\eta. \tag{2.27}$$

BM2. *Jeśli $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{I}$ spełniają warunek $\xi_1 \succ \cdots \succ \xi_m \nsim \cdots \nsim \xi_k \prec \cdots \prec \xi_n$ dla pewnych $1 \leq m \leq k \leq n$, to*

$$\varphi(b_{\xi_1} \ldots b_{\xi_n}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(b_{\xi_j}). \tag{2.28}$$

W pracy [Wys6] udowodniono, że warunki te wystarczają do obliczania momentów mieszanych dla operatorów, będących bm-rozszerzeniami, czyli wyrażeń postaci $\varphi\left(A_{\xi_1}\dots A_{\xi_m}\right)$, dla dowolnych $\xi_1,\dots,\xi_m\in\mathbf{I}$, $m\geq 1$.

Dalej dokładnie badany jest związek bm-produktu ze znanymi produktami grafów: produktem typu Markowa oraz produktem grzebieniowym. M. Bożejko pokazał, że niezależność boole'owska jest związana z produktem Markowa grafów, natomiast L. Accardi, A. Ben Ghorbal i N. Obata pokazali, że niezależność monotoniczna jest związana z produktem grzebieniowym grafów. Obie te konstrukcje wykorzystane zostały do zdefiniowania bm-produktu grafów, który jest związany z bm-niezależnością. Mianowicie, jeśli dla każdego $\xi\in\mathbf{I}$ bazę $\{e_\xi^m\ :\ m\geq 0\}$ przestrzeni Hilberta $\mathbf{H}_\xi$ utożsamić z grafem liczb całkowitych nieujemnych na półprostej $[0,+\infty)$, to bm-produkt tych grafów daje konstukcję bazy bm-produktu tej rodziny przestrzeni Hilberta.

Określenie bm-produktu Γ rodziny grafów $\{\Gamma_\xi\ :\ \xi\in\mathbf{I}\}$ jest następujące. O zbiorze indeksów $\mathbf{I}$ zakładamy, że ma strukturę spójnego, lokalnie skończonego grafu dyskretnego, oznaczonego $\Gamma(\mathbf{I})$, zorientowanego zgodnie z porządkiem $\prec$. Oznacza to, że zbiorem wierzchołków $\mathcal{V}(\mathbf{I})$ jest cały zbiór $\mathbf{I}$, natomiast krawędzie $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ są utworzone przez pary $[\xi,\eta]$ dla których $\xi\prec\eta$ oraz pomiędzy ξ i η nie ma innego elementu ρ: warunek $\xi\preceq\rho\preceq\eta$ implikuje $\rho\in\{\xi,\eta\}$. Ponadto każde dwa wierzchołki są połączone drogą (niekoniecznie zorientowaną) złożoną ze skończonej liczby krawędzi: jeśli $\rho_0,\rho_{m+1}\in\mathbf{I}$, to istnieją $\rho_1,\dots,\rho_m\in\mathbf{I}$ takie że dla każdego $0\leq j\leq m$ jest $[\rho_j,\rho_{j+1}]\in\mathcal{E}(\mathbf{I})$ lub $[\rho_{j+1},\rho_j]\in\mathcal{E}(\mathbf{I})$. W szczególności pomiędzy elementami nieporównywalnymi nie ma połączenia krawędzią ani zorientowaną drogą złożoną z kolejnych krawędzi, natomiast jest połączenie drogą niezorientowaną. Droga zorientowana oznacza ciąg wierzchołków $(\rho_1,\dots,\rho_m)$ taki, że $m\geq 2$ oraz $[\rho_j,\rho_{j+1}]\in\mathcal{E}(\mathbf{I})$ dla każdego $1\leq j\leq m-1$. Zakładamy też, że w grafie $\Gamma(\mathbf{I})$ nie ma zorientowanych pętli, chociaż mogą być pętle niezorientowane.

Załóżmy teraz, że mamy daną rodzinę grafów spójnych (niezorientowanych) $\{\Gamma_\xi\ :\ \xi\in\mathbf{I}\}$, indeksowaną zbiorem $\mathbf{I}$, i że w każdym z nich mamy wyróżniony wierzchołek Ω_ξ. Niech $\mathcal{V}_\xi$ oznacza zbiór wierzchołków grafu Γ_ξ, a $\mathcal{E}_\xi$ zbiór jego krawędzi. Jeśli dwa elementy $\xi,\eta\in\mathbf{I}$ tworzą krawędź $[\xi,\eta]\in\mathcal{E}(I)$ w grafie $\Gamma(I)$, w szczególności $\xi\prec\eta$, to w każdym wierzchołku grafu Γ_ξ doklejamy wierzchołkiem Ω_η kopię grafu Γ_η. Jest to ta sama procedura jak w przypadku iloczynu grzebieniowego grafów (ang. "comb product") związanego z niezależnością monotoniczną. Jednakże, jeśli mamy trzeci element $\rho\in\mathbf{I}$ który spełnia warunki: $[\xi,\rho]\in\mathcal{E}(\mathbf{I})$ oraz $\rho\nsim\eta$, to po doklejeniu kopii grafu Γ_ρ do każdego wierzchołka grafu Γ_ξ, w danym wierzchołku Γ_ξ doklejone grafy Γ_ρ i Γ_η będą się stykały tylko swoimi wierzchołkami Ω_ρ i Ω_η; to jest sytuacja produktu markowskiego grafów, związana z niezależnością boole'owską.

Głównym wynikiem pracy [Wys6] jest Twierdzenie 6.1, będące nieprzemienną analogią klasycznego centralnego twierdzenia granicznego. W tym twierdzeniu zbiór indeksów $\mathbf{I}_d$ składa się z d-wymiarowych macierzy symetrycznych dodatnio określonych, których wyrazy są liczbami całkowitymi. Dotyczy ono granicznych rozkładów sum częściowych postaci:

$$S_{\mathbf{N}}:=S_{N_1,\dots,N_d}:=\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{J}_{\mathbf{N}}|}}\sum_{\xi\in\mathbf{J}_{\mathbf{N}}}A_\xi. \tag{2.29}$$

Występujące tutaj zbiory $\mathbf{J}_{\mathbf{N}}$, dla $\mathbf{N}:=(N_1,\dots,N_d)$, są złożone z takich macierzy ze zbioru $\mathbf{I}_d$, w których elementy $k_1,\dots,k_d$ na przekątnej spełniają warunek:

$$1\leq k_1\leq N_1,\quad\dots,\quad 1\leq k_d\leq N_d$$

Co więcej, ich przesunięcia są też takiej samej postaci. Dokładniej mówiąc, dla ustalonego $\xi \in \mathbf{J_N}$, który ma na przekątnej $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$, mamy

$$\{\eta \in \mathbf{J_N} \ : \ \xi \prec \eta\} = \xi + \mathbf{J_{N-k}}$$

gdzie $\mathbf{N} - \mathbf{k} := (N_1 - k_1, \ldots, N_d - k_d)$.

Rozpatrywane tutaj operatory A_ξ, dla $\xi \in \mathbf{I}_d$, są bm-rozszerzeniami, a rozkłady są względem stanu φ, określonego przez wyróżniony wektor Ω na bm-produkcie $\mathcal{H}$. Twierdzenie 6.1 w [Wys6] mówi, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje granica

$$\lim_{\mathbf{N}\to\infty} \varphi\left((S_\mathbf{N})^{2n}\right) = g_n \tag{2.30}$$

i ciąg $(g_n)_{n=0}^\infty$ spełnia rekurencję: $g_0 = g_1 = 1$,

$$g_n = \sum_{r=1}^{n} (\gamma_d(r))^d \cdot g_{r-1} \cdot g_{n-r} \tag{2.31}$$

gdzie $\gamma_d(r) = \frac{d+1}{2} B(\frac{d+1}{2}; \frac{(r-1)(d+1)}{2})$ są liczbami określonymi przy pomocy funkcji beta Eulera (pierwszego rodzaju), czyli całki

$$B(a+1; b+1) := \int_0^1 x^a (1-x)^b dx \tag{2.32}$$

W pracy tej pokazano także, że tą samą rekurencję można otrzymać kombinatorycznie, rozpatrując zbiory, zdefiniowane w następujący sposób.

Definicja 2.7.2 *Niech $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ będzie podzbiorem skończonym. Zbiór $\mathcal{BMNC}^n(\mathbf{J})$ składa się ze wszystkich ciągów $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ takich, że:*

1. *Każdy element ξ występuje w ciągu parzystą liczbę razy.*
2. *Istnieje nieprzecinająca się dwupartycja $\mathcal{V} \in NC_2(2n)$ której każdy blok B spełnia warunek: jeśli $B = \{j, k\}$ to $\xi_j = \xi_k$.*
3. *Jeżeli dla pewnych dwóch bloków $B = \{k_1 < k_2\}$ i $B' = \{l_1 < l_2\}$ jest $\xi_{k_1} = \xi_{k_2} = \xi$, $\xi_{l_1} = \xi_{l_2} = \eta$, i jeżeli $k_1 < l_1 < l_2 < k_2$, to elementy $\xi, \eta \in \mathbf{I}$, które je definiują, muszą spełniać relację $\xi \prec \eta$.*

Jeśli teraz rozpatrzymy moce tych zbiorów, czyli liczby $S_n^\mathbf{N} = |\mathcal{BMNC}^n(\mathbf{J_N})|$, to można pokazać, że spełniają one następującą rekurencję (Lemat 7.1 w [Wys6])

$$S_n^\mathbf{N} = \sum_{r=1}^{n} S_{n-r}^\mathbf{N} \cdot \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{N}} |\mathbf{I}(\mathbf{k})| \cdot S_{r-1}^{\mathbf{N}-\mathbf{k}} \tag{2.33}$$

Z tej rekurencji wynika (Twierdzenie 7.2 [Wys6]), że liczby g_n są granicami

$$g_n = \lim_{\mathbf{N}\to+\infty} \frac{S_n^\mathbf{N}}{|\mathbf{J_N}|^n}. \tag{2.34}$$

Z tego podejścia otrzymujemy także wzór rekurencyjny (2.31) dla liczb g_n, oraz sposób wyliczania współczynników $\gamma_d(m)$:

$$(\gamma_d(r))^d = \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{N}} \frac{|\mathbf{I_k}|}{|\mathbf{J_N}|} \left(\frac{|\mathbf{J_{N-k}}|}{|\mathbf{J_N}|}\right)^{r-1}. \tag{2.35}$$

Ostatnim przykładem częściowego porządku, rozpatrywanym w tej pracy, jest drzewo jednorodne $\mathbf{I}_d$ stopnia $d+1$, dla $d \geq 2$, z "korzeniem" $\xi_0 \in \mathbf{I}_d$. Oznacza to że z ξ_0 wychodzi d krawędzi, natomiast ze wszystkich innych wierzchołków wychodzi $d+1$ krawędzi. Naturalną odległość pomiędzy wierzchołkami $\xi, \eta \in \mathbf{I}_d$ oznaczamy $dist(\xi, \eta)$. Jako zbiory $\mathbf{I}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, wybieramy "sfery" o promieniu $\mathbf{k}$, czyli:

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) := \{\xi \in \mathbf{I}_d \ : \ dist(\xi_0, \xi) = \mathbf{k}\}, \tag{2.36}$$

natomiast jako zbiory $\mathbf{J_N}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ bierzemy "kule otwarte" o promieniu $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{J_N} := \{\xi \in \mathbf{I}_d \ : \ dist(\xi_0, \xi) < \mathbf{N}\}. \tag{2.37}$$

Wzrost liczności tych zbiorów jest wykładniczy:

$$|\mathbf{J_N}| = \frac{d^{\mathbf{N}} - 1}{d-1}.$$

W tym przypadku, otrzymujemy twierdzenie graniczne dla bm-niezależności, w którym rekurencja dla momentów (parzystych) miary granicznej, jest postaci:

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_d(k) \cdot g_{k-1} \cdot g_{n-k}, \tag{2.38}$$

przy czym $\gamma_d(1) = 1$ oraz $\gamma_d(k) = 0$ gdy $k \geq 2$. Oznacza to, że $g_n \equiv 1$ dla wszystkich $n \geq 0$, czyli że miarą graniczną jest rozkład Bernoulli'ego $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

LITERATURA.

[ABO] L. Accardi, A. ben Ghorbal, N. Obata, "Monotone independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation", *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 7 (2004), No. 3, 419–435.

[Av] D. Avitzour, "Free products of C^*-algebras". *Trans. Amer. Math. Soc.* 271 (1982), no. 2, 423–435.

[Bia] Ph. Biane, "Processes with free increments". *Math. Z.* 227 (1998), no. 1, 143–174.

[Bo1] M. Bożejko, "On $\Lambda(p)$ sets with minimal constant in discrete noncommutative groups.", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51 (1975), 407–412.

[Bo2] M. Bożejko, "Positive-definite kernels, length functions on groups and a noncommutative von Neumann inequality". *Studia Math.* 95 (1989), no. 2, 107–118.

[BW0] M. Bożejko, J. Wysoczański, "New examples of convolutions and non-commutative central limit theorems", Banach Center Publ. vol 43 (1998), 95–103.

[BKS] M. Bożejko, B. Kümmerer, R. Speicher, "q-Gaussian processes: non-commutative and classical aspects". *Comm. Math. Phys.* 185 (1997), no. 1, 129–154

[BW1] M. Bożejko, J. Wysoczański, Remarks on t-transformations of measures and convolutions, *Ann. I. H. Poincare - PR* 37, No.6 (2001), 737–761.

[FK] J. Faraut, A. Koranyi, `Analysis on Symmetric Cones`, Oxford Univ. Press 1994.

[F1] U. Franz, "Unification of Boolean, monotone, anti-monotone, and tensor independence and Lévy processes". *Math. Z.* 243 (2003), no. 4, 779–816.

[F2] U. Franz, "Monotone independence is associative". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 4 (2001), no. 3, 401–407

[Haag] U. Haagerup, "An example of a nonnuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property". *Invent. Math.* 50 (1978/79), no. 3, 279–293.

[HO] A. Hora, N. Obata, `Quantum Probability and Spectral Analysis`, Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Berlin, 2007.

[KrY] A. Krystek, H. Yoshida, "Generalized t-transformation of probability measures and deformed convolitions", *Prob. Math. Stat.* 24 (2004), 97–119.

[Lan] E. C. Lance, "An explicit description of the fundamental unitary for $SU_q(2)$" *Commun. Math. Phys.*, 164 (1994), 1–15.

[Len1] R. Lenczewski, "Unification of independence in quantum probability", *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 1 No. 3 (1998), 383–405.

[LenS] R. Lenczewski, R. Sałapata, "Discrete interpolation between monotone probability and free probability". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 9 (2006), no. 1, 77–106.

[Lu] Y. G. Lu, "An interacting Fock space and the arcsine law", *Probab. Math. Stat.* 17 (1997), 149–166.

[M] W. Młotkowski, "Operator-valued version of conditionally free product". *Studia Math.* 153 (2002), no. 1, 13–30.

[Mu1] N. Muraki "Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space". *Comm. Math. Phys.* 183 (1997), no. 3, 557–570.

[Mu2] N. Muraki, "Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers". *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 4 (2001), no. 1, 39–58.

[Ob] N. Obata, "Quantum probabilistic approach to spectral analysis of star graphs", *Interdiscip. Inform. Sci.* 10 (2004), 41–52.

[P] G. Pisier, `Introduction to operator space theory`. London Mathematical Society Lecture Note Series, 294. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Pu] W. Pusz, "Twisted canonical anticommutation relations". *Rep. Math. Phys.* 27 (1989), no. 3, 349–360.

[PuW] W. Pusz, S. L. Woronowicz, "Twisted second quantization". *Rep. Math. Phys.* 27 (1989), no. 2, 231–257.

[Ric] E. Ricard, "The von Neumann algebras generated by t-Gaussians". *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 56 (2006), no. 2, 475–498.

[Sp1] R. Speicher, "Multiplicative functions on the lattice of non-crossing partitions and free convolution". *Math. Ann.* 298 (1994), 611–628.

[SpW] R. Speicher, R. Woroudi, "Boolean convolution" Fields Institute Communications, Vol. 12 (D. Voiculescu, ed.), AMS, 1997, pp. 267–279.

[Voi1] D. Voiculescu, "Addition of non-commutaing random variables", *J. Funct. Anal.* 66 (1986), 323–346.

[VDN] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica, `Free Random Variables`, CRM Monograph Series vol. 1, Providence, RI, Amer. Math. Soc. (1992).

[Woj] Ł. Wojakowski, "Probability interpolating between free and Boolean". *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat.) 446 (2007), 45 pp.

[SLW1] S. L. Woronowicz, "Twisted $SU_q(2)$ group. An example of non-commutative differential calculus", *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 23, (1987), 117–181.

[SLW2] S.L. Woronowicz, "Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups". *Invent. Math.*, 93 (1988), 35–76.

[Wys1] J. Wysoczański, "A characterization of radial Herz-Schur multipliers on free products of discrete groups". *J. Funct. Anal.* 129 (1995), no. 2, 268–292.

[Wys2] J. Wysoczański, Monotonic independence on weakly monotone Fock space, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 8 (2005), No. 2, 259 - 275.

[Wys3] J. Wysoczański, A d-deformation of free gaussian random variables, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 8 (2005), No. 4, 1-12.

[Wys4] J. Wysoczański, The von Neumann algebra associated with an infinite number of t-free noncommutative gaussian random variables, *Proc. 25th QP Conference*, Banach Center Publ. 73, (2006), 435-438.

[Wys5] J. Wysoczański, Monotonic independence associated with partially ordered sets, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 10 No. 1 (2007), 17–41.

[Wys6] J. Wysoczański, bm-Central limit theorems associated with monotic independence for positive definite real symmetric matrices, *Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 11 No. 1 (2008), 33-51.

[Wys7] J. Wysoczański, Twisted product structure representation theory of the quantum group $U_q(2)$, *Rep. Math. Phys.* 54 No. 3 (2004), 327-347.